المعاصر

محمد قداري

المغني في الرياضيات

هذا الكتاب مرفق بقرص تعليمي

سلسلة الرياضيات بالفيديو

السنة الثالثة ثانوي علوم تجريبية

- أنشطة وتطبيقات محلولة بالفيديو .
- ملخصات هامة للدروس .
- 412 تمرين ومسألة محلولة .
- وضعيات إدماجية متنوعة و هادفة .
- تمارين ومسائل من بكالوريات أجنبية .
- الحلول المفصلة لمواضيع البكالوريا (المنهاج الجديد) .

BAC

وفق - البرنامج الجديد لوزارة التربية الوطنية
- التوزيع السنوي المعتمد وطنيا

المعاصرة

المحور الأول

النهايات

ما يجب أن يعرف

تتمات على النهايات

1. نهايات بعض الدوال المرجعية:

* n عدد طبيعي غير معدوم ، $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ ، $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty \;; & n \text{ زوجي}\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty \;; & n \text{ فردي}\end{cases}$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ * $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ * $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x} = +\infty$ * $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{x} = -\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

2. العمليات على النهايات:

f و g دالتان. a يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$. نقبل دون برهان المبرهنات التالية:

نهاية مجموع دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

نهاية جداء دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a}[f(x)\times g(x)]$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

نهاية حاصل قسمة دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$	$\dfrac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

ملاحظة: تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات عدم التعيين (ح ع ت)

3. نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$:

قواعد إجرائية :

- النهاية عند $+\infty$ وعند $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $+\infty$ ($-\infty$).
- النهاية عند $+\infty$ وعند $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $+\infty$ ($-\infty$).

نهاية دالة مركبة

مبرهنة: a ، b و c تمثل أعددا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$. u ، v و f دوال حيث $f = v\ ou$.

إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ وإذا كانت $\lim\limits_{X\to b} v(X) = c$ فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$

النهايات بالمقارنة

مبرهنة1 (مبرهنة الحصر) : f ، g و h دوال و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l$ وإذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $g(x)\le f(x)\le h(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

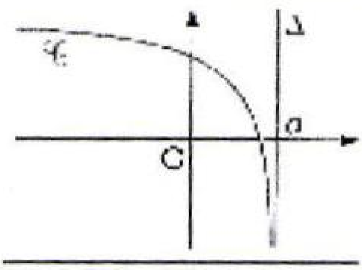
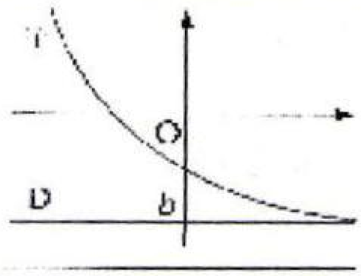
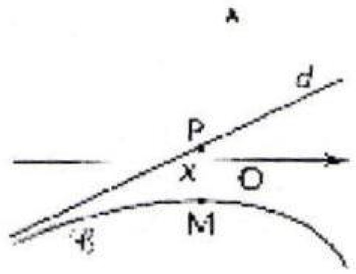
مبرهنة2: f ، g دالتان . إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ وإذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x)\ge g(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

مبرهنة3: f ، g دالتان . إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ وإذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x)\le g(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

ملاحظة: تمدد هذه المبرهنات إلى حالتي النهاية عند $-\infty$ وعند عدد حقيقي.

المستقيمات المقاربة

1 . تذكير: a و b عددان حقيقيان. f دالة معرفة على مجال I و $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني في معلم $(O;I,J)$.

النهاية	المستقيم المقارب	التمثيل البياني
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$	المستقيم Δ ذو المعادلة $x=a$ و الموازي لمحور التراتيب مستقيم مقارب للمنحني $\mathcal{C}$.	
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=b$ أو $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=b$	المستقيم D ذو المعادلة $y=b$ و الموازي لمحور الفواصل مستقيم مقارب للمنحني $\mathcal{C}$ عند $+\infty$ أو عند $-\infty$.	
$\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ أو $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$	المستقيم d ذو المعادلة $y=ax+b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني $\mathcal{C}$ عند $+\infty$ أو عند $-\infty$.	

ملاحظة: إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي: $f(x)=ax+b+\varphi(x)$

مع $\lim\limits_{x\to +\infty}\varphi(x)=0$ أو $\lim\limits_{x\to -\infty}\varphi(x)=0$ فمن الواضح أن المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f عند $+\infty$ $(-\infty)$.

2 . الوضع النسبي لمنحن والمستقيم المقارب المائل :

لدراسة وضعية المنحني (C) الممثل لدالة f بالنسبة إلى مستقيم مقارب له معادلته $y=ax+b$ نقوم بدراسة إشارة الفرق $\left[f(x)-(ax+b)\right]$.

- إذا كان $f(x)-(ax+b)<0$ تكون وضعية (C) تحت المستقيم المقارب المائل .
- إذا كان $f(x)-(ax+b)>0$ تكون وضعية (C) فوق المستقيم المقارب المائل .
- إذا قبلت المعادلة $f(x)-(ax+b)=0$ حلولا على مجموعة تعريف الدالة f ، فإن المستقيم المقارب المائل يقطع المنحنى (C) في نقط فواصلها هي حلول المعادلة .

تمارين محلولة

تمرين 01

أدرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية الدالة f المعرفة على D_f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

1. $D_f = \mathbb{R}$ ، $f(x) = -x^3 + 2x - 2$
2. $D_f = \mathbb{R}$ ، $f(x) = 3x^2 + x - 3$
3. $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ ، $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{2 - x}$

الحل

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x^3\right) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x^3\right) = -\infty$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(3x^2\right) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(3x^2\right) = +\infty$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2}{-x}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{-x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$.

تمرين 02

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2;1\}$ بـ: $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 + x - 2}$

1. حدد حسب قيم x إشارة $x^2 + x - 2$.
2. أدرس النهايات من اليمين و من اليسار عند كل من -2 و 1.
3. أدرس نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

الحل

1. لكثير الحدود $x^2 + x - 2$ جذران هما -2 و 1. و بتطبيق القاعدة المحددة لإشارة ثلاثي حدود من الدرجة 2 نجد:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x^2 + x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to -2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to -2}} \frac{2x+3}{x^2+x-2}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$.

$\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}} \frac{2x+3}{x^2+x-2}=\frac{5}{0^-}=-\infty$.

$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{2x+3}{x^2+x-2}=\frac{5}{0^+}=+\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{2x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{2}{x}\right)=0$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{x}\right)=0$.

تمرين 03

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x)=\frac{2x^2+3x-1}{(x-1)^2}$

أدرس نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.مبينا المستقيمات المقاربة لـ (C) المنحني الممثل للدالة f في معلم.

الحل

لدينا: $\mathbb{R}-\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ و $f(x)=\frac{2x^2+3x-1}{x^2-2x+1}$. ومنه:

* $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x^2+3x-1}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$.

* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x^2+3x-1}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$.

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $y=2$ مقارب لـ (C) عند $-\infty$ و $+\infty$.

* $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+3x-1}{(x-1)^2}=\frac{4}{0^+}=+\infty$.

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب لـ (C) بجوار $+\infty$.

تمرين 04

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=2x+3+\frac{1}{x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

1. بين أن المستقيم $(D): y=2x+3$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

2. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D).

الحل

1. لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+3)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \text{ و } \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x+3)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

ومنه المستقيم $(D): y=2x+3$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

ملاحظة: يمكن أن نعبر عن النهايتين السابقتين معا كما يلي:

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(2x+3)\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

2. لدينا: $\left[f(x)-(2x+3)\right]=\frac{1}{x}$ ومنه:

- من أجل كل x من $]0;+\infty[$ يكون $\left[f(x)-(2x+3)\right]>0$، لأن $\frac{1}{x}>0$.

إذن المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم المقارب (D) في المجال $]0;+\infty[$.

- من أجل كل x من $]-\infty;0[$ يكون $\left[f(x)-(2x+3)\right]<0$. لأن $\frac{1}{x}<0$.

إذن المنحني (C_f) يقع تحت المستقيم المقارب (D) في المجال $]-\infty;0[$.

تمرين 05

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=-x+2+\frac{3}{x^2}$. وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم $(O;I,J)$.

1. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x+2$ مستقيم مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2. أدرس وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل (Δ).

الحل

1. لدينا: $f(x)-(-x+2)=\frac{3}{x^2}$ وبما أن $\lim_{|x|\to+\infty}\frac{3}{x^2}=0$ فإن (Δ) مستقيم مقارب لـ (C) عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2. لدينا: $f(x)-(-x+2)=\frac{3}{x^2}$ وبما أن $\frac{3}{x^2}>0$ فإن المنحني (C) يقع فوق المستقيم المقارب (Δ) على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$.

تمرين 06

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2|x|}{x} & ;x\neq 0 \\ f(0)=2 \end{cases}$.

أدرس نهاية الدالة f عند 0.

الحل

لدينا: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2|x|}{x}=\dfrac{2x}{x}=2 & ;x>0 \\ f(x)=\dfrac{2|x|}{x}=\dfrac{2(-x)}{x}=-2 & ;x<0 \\ f(0)=2 \end{cases}$. لكون: $\begin{cases} |x|=x & ;x>0 \\ |x|=-x & ;x<0 \end{cases}$.

ومنه: $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x)=2$ و $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x)=-2$.

بما أن: $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x)\neq \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x)$، فإن الدالة f ليست لها نهاية عند 0.

تمرين 07

أحسب النهايتين التاليتين:

1. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+x+1}$.
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sin\left(\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)$.

الحل

بتطبيق قاعدة حساب نهاية دالة مركبة نجد:

1. لدينا: $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^2+x+1\right)=\lim\limits_{x\to -\infty} x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to +\infty}\sqrt{X}=+\infty$.

إذن: $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{x^2+x+1}=+\infty$.

2. لدينا: $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\pi x}{2x}=\dfrac{\pi}{2}$ و $\lim\limits_{X\to \frac{\pi}{2}}\sin X=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$.

إذن: $\lim\limits_{x\to +\infty}\sin\left(\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)=1$.

تمرين 08

نعتبر الدالة f المعرفة على • بـ: $f(x) = x + \sin x$.

أحسب النهايتين: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

الحل

نعلم أنه من أجل كل x من • ، $-1 \le \sin x \le 1$ ومنه فإن:

من أجل كل x من • لدينا: $x - 1 \le x + \sin x \le x + 1$.

*بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

*بما أن $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + 1) = -\infty$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

تمرين 09

أحسب النهاية التالية: $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

الحل

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;1[$ كما يلي: $f(x) = \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

(يهمنا x بجوار 0 و $x > 0$)

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;1[$ فإن: $-1 \le \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$

بضرب طرفي المتباينة الأخيرة في العدد الموجب تماما $\sqrt{x}$ نجد: $-\sqrt{x} \le \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le \sqrt{x}$

أي $-\sqrt{x} \le f(x) \le \sqrt{x}$ ، وبما أن $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \sqrt{x} = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \left(-\sqrt{x}\right) = 0$. فإن $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = 0$

إذن: $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

تمرين 10 (إزالة حالة عدم تعيين)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\{-2;1\}$ − • بـ: $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^2 + x - 2}$

أحسب نهاية الدالة f عند -2 .

الحل

لدينا: $\lim\limits_{x \to -2} (x^3 + 2x^2 + x + 2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 + (-2) + 2 = 0$

و: $\lim\limits_{x \to -2} (x^2 + x - 2) = (-2)^2 + (-2) - 2 = 0$ ، إذن حالة عدم تعين من الشكل: $\left(\frac{0}{0}\right)$.

<u>إزالة حالة عدم التعيين:</u>

نستشف مما سبق أن العدد -2 جذر لكثيري الحدود x^3+2x^2+x+2 و x^2+x-2.

إذن كل من x^3+2x^2+x+2 و x^2+x-2 يقبل القسمة على $x+2$.

بإجراء القسمة الإقليدية نجد هكذا :

x^3+2x^2+x+2	$x+2$
$-x^3-2x^2$	x^2+1
$x+2$	
0	

x^2+x-2	$x+2$
$-x^2-2x$	$x-1$
$-x-2$	
0	

ومنه: $x^3+2x^2+x+2=(x+2)(x^2+1)$ و $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$.

إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2;1\}$:

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+x-2}=\frac{\cancel{(x+2)}(x^2+1)}{\cancel{(x+2)}(x-1)}=\frac{x^2+1}{x-1}$$ ومنه:

$$\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{(-2)^2+1}{(-2)-1}=-\frac{5}{3}$$ ، إذن: $\lim_{x\to-2}f(x)=-\frac{5}{3}$.

تمرين 11 (إزالة حالة عدم تعيين)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ: $f(x)=-x+\dfrac{x^3+x+1}{x-2}$.

أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

الحل

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x+1}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x}}=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

إذن حالة عدم تعيين من الشكل: $(+\infty-\infty)$.

<u>إزالة حالة عدم التعيين:</u>

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{2\}$:

$$-x+\frac{x^3+x+1}{x-2}=\frac{(-x)(x-2)}{x-2}+\frac{x^3+x+1}{x-2}=\frac{-x^2+2x+x^3+x+1}{x-2}$$
$$=\frac{x^3-x^2+3x+1}{x-2}$$

ومنه: $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2+3x+1}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$$

إذن: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

تمرين 12 (إزالة حالة عدم تعيين)

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.

أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

الحل

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=+\infty$ إذ أن $\lim_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$.

وبالتالي حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$.

<u>إزالة حالة عدم التعيين:</u>

لدينا من أجل $x\geq 0$ ، باستعمال $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ مرافق $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ نجد :

$$f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\times\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)=+\infty$ ومنه: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$.إذن: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

تمرين 13 (إزالة حالة عدم تعيين)

نعتبر الدالة f المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ $f(x)=2x+1-\sqrt{x^2+x-2}$.

أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

الحل

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}(2x+1)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x-2}=+\infty$ إذ أن $\lim_{x\to+\infty}(x^2+x-2)=+\infty$.

وبالتالي حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$.

<u>إزالة حالة عدم التعيين:</u>

لدينا من أجل $x\geq 1$:

$$f(x)=2x+1-\sqrt{x^2+x-2}=2x+1-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$=2x+1-\sqrt{x^2}\times\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=2x+1-|x|\times\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$=2x+1-x\times\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=x\left(2+\frac{1}{x}-\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\right)$$

لأن $|x|=x$ من أجل $x\geq 1$.

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)=2$ ، $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=1$ إذ أن $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)=1$

ومنه: $\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}-\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\right)=2-1=1$

و بالتالي: $\lim_{x\to+\infty} x\left(2+\frac{1}{x}-\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\right)=+\infty$. إذن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

<u>ملاحظة</u>: يمكن حساب هذه النهاية باستعمال طريقة استخدام المرافق.

تمرين 14 (إزالة حالة عدم تعيين)

نعتبر الدالة f المعرفة على * • بـ: $f(x)=\frac{\sin(3x)}{x}$

أحسب نهاية الدالة f عند 0 .

الحل

نعلم النهاية الشهيرة التالية: $\lim_{u\to0}\frac{\sin u}{u}=1$. سنستعمل طريقة تبديل المتغير ،

نضع: $u=3x$ ، ومنه: $x=\frac{u}{3}$. ولدينا: $x\to0$ يكافئ $u\to0$.

وبالتالي: $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{u\to0}\frac{\sin u}{\frac{u}{3}}=\lim_{u\to0}3\frac{\sin u}{u}=3\lim_{u\to0}\frac{\sin u}{u}=3\times1=3$.

إذن: $\lim_{x\to0} f(x)=3$.

تمرين 15 (إزالة حالة عدم تعيين)

نعتبر الدالة f المعرفة على * • بـ: $f(x)=\frac{\cos x-1}{x}$

أحسب نهاية الدالة f عند 0 .

الحل

1) لدينا: $\frac{\cos(x)-1}{x}=\frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0}$ ، إذن نستعمل الدالة $g:x$ • $\cos(x)$

الدالة g قابلة للاشتقاق على • ولدينا: $g'(x)=-\sin(x)$. ومنه:

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0}=g'(0)=-\sin(0)=0$$

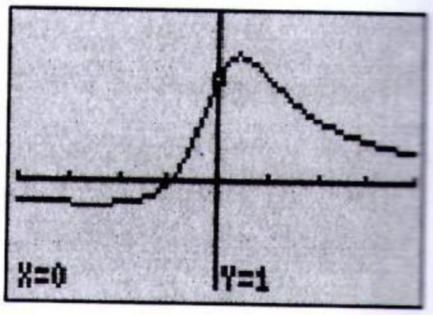
إذن: $\lim_{x\to0} f(x)=0$

تمرين 16

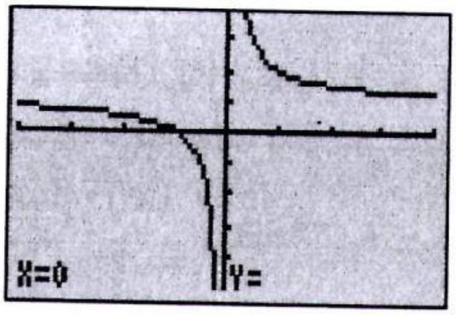
علما أن: أ) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. ب) $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$

جـ) $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} h(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} h(x) = +\infty$

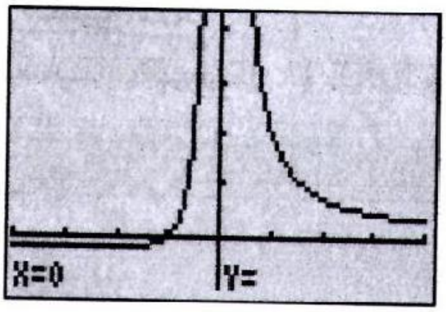
أرفق كل دالة من الدوال f، g و h بتمثيلها البياني من بين التمثيلات التالية:



(1)



(2)



(3)

الحل

- المنحني (1) يمثل الدالة g . (بالفعل $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$)
- المنحني (2) يمثل الدالة h . (بالفعل $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} h(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} h(x) = +\infty$)
- المنحني (3) يمثل الدالة f. (بالفعل $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$)

تمرين 17

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة مما يلي:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]2;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 7x - 11}{x - 2}$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. عبارة أخرى لـ $f(x)$ هي: $f(x) = -2x + 3 - \dfrac{5}{x-2}$.
2. يقبل المنحني (C) مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته: $x = 2$.
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
4. المستقيم ذو المعادلة $y = -2x + 3$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C) عند $+\infty$.

الحل

1 . صحيح، لأن: من أجل كل x من المجال $]2;+\infty[$ لدينا:

$$-2x+3-\frac{5}{x-2}=\frac{(-2x+3)(x-2)}{x-2}-\frac{5}{x-2}=\frac{-2x^2+4x+3x-6-5}{x-2}$$
$$=\frac{-2x^2+7x-11}{x-2}=f(x)$$

طريقة أخرى: يمكنك إجراء القسمة الإقليدية لـ $-2x^2+7x-11$ على $x-2$.

2 . **صحيح**، لأن:

عند حساب النهاية $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 2}} f(x)$ نجد هكذا :

$$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 2}}\frac{-2x^2+7x-11}{x-2}=\frac{-5}{0^+}=-\infty .$$

3 . **خطأ**، لأن:

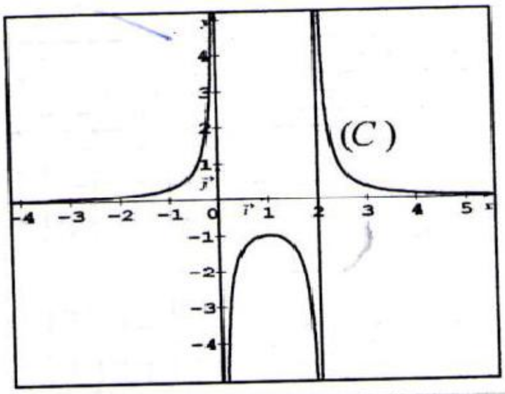
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2+7x-11}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}(-2x)=-\infty .$$

4 . **صحيح**، لأن:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-2x+3)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x-2}=0 .$$

(استعملنا العبارة $f(x)=-2x+3-\frac{5}{x-2}$)

تمرين 18



f دالة و (C) تمثيلها البياني المبين في الشكل المقابل. بقراءة بيانية:

1 . عين D مجموعة تعريف الدالة f .

2 . عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

3 . عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني (C) .

الحل

بقراءة بيانية نجد:

1 . $D=\mathbb{R}-\{0;2\}=]-\infty;0[\cup]0;2[\cup]2;+\infty[$.

2 . $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 2}} f(x)=-\infty$ ،

$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 2}} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

3. المستقيمات المقاربة لـ (C):

* المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ (محور الفواصل) عند $-\infty$ و $+\infty$ لأن:

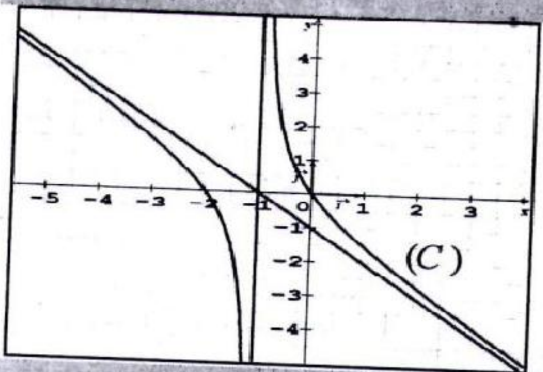
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

* المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (محور التراتيب) بجوار $+\infty$ و $-\infty$ لأن:

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$.

* المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ بجوار $-\infty$ و $+\infty$ لأن: $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$.

تمرين 19 1^{1}



f دالة و (C) تمثيلها البياني المبين في الشكل المقابل. بقراءة بيانية:

1. عين D مجموعة تعريف الدالة f.
2. عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.
3. عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني (C).
4. استعمل البيان السابق لتحديد إشارة: $f(x) + x + 1$.

الحل

1. $D = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

3. المستقيمات المقاربة لـ (C):

* المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ بجوار $-\infty$ و $+\infty$ لأن: $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty$.

* المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) ، لنعين معادلة له.

إن (Δ) يمر من النقطتين $A(-1;0)$ ، $B(0;-1)$ ومعادلته المختصرة من الشكل $y = ax + b$.

تعيين a: لدينا $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-1-0}{0-(-1)} = -1$ ، إذن $a = -1$.

تعيين b: لدينا $(\Delta): y = -x + b$ و $A(-1;0)$ مثلا نقطة من (Δ) إذن: $0 = -(-1) + b$

أي $b = -1$. إذن: $(\Delta): y = -x - 1$.

4. تحديد إشارة: $f(x) + x + 1$

لدينا: $f(x) + x + 1 = f(x) - (-x - 1)$ ، إذن نستغل الوضع النسبي لـ (C) و (Δ).

بقراءة بيانية نجد هكذا:

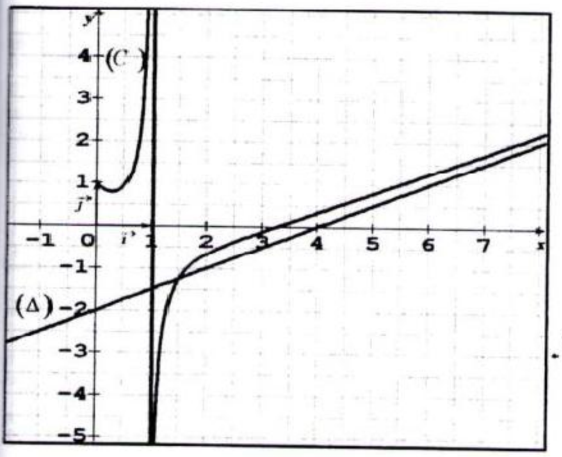
• على المجال $]-\infty; -1[$: (C) يقع تحت (Δ) وبالتالي: $f(x) + x + 1 < 0$.

• على المجال $]-1;+\infty[$ (C) يقع فوق (Δ) و بالتالي: $f(x)+x+1>0$.

تمرين 20

في الشكل أدناه لدينا الرسم البياني (C) لدالة f معرفة على $D=[0;1[\cup]1;+\infty[$.

كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+3x-2}{2(x^2-1)}$



و المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=\dfrac{1}{2}x-2$.

اختر الإجابة الصحيحة مع التبرير في كل حالة:

1. بقراءة بيانية:

ج 1) المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقارب لـ (C)

ج 2) المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب لـ (C)

ج 3) (C) لا يقبل مستقيما مقاربا أفقيا و لا عموديا.

2. بالحساب:

من أجل كل x من $]1;+\infty[$: $f(x)=\dfrac{1}{2}x+a+\dfrac{bx+c}{2(x^2-1)}$

ج 1) $a=-2$ ، $b=4$ ، $c=-6$.

ج 2) $a=2$ ، $b=-2$ ، $c=-3$.

ج 3) $a=1$ ، $b=2$ ، $c=3$.

3. بالحساب:

(C) يقبل مستقيما مقاربا عند $+\infty$ معادلته:

ج 1) $y=\dfrac{1}{2}x+1$. ج 2) $y=\dfrac{1}{2}x+2$. ج 3) $y=\dfrac{1}{2}x-2$.

الحل

1. الجواب ج 2) لأن: بقراءة بيانية نلاحظ أن: $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=-\infty$.

2. الجواب ج 1) لأن بالحساب نجد هكذا:

$$\frac{1}{2}x+a+\frac{bx+c}{2(x^2-1)}=\frac{\left(\frac{1}{2}x+a\right)\left(2(x^2-1)\right)}{2(x^2-1)}+\frac{bx+c}{2(x^2-1)}$$

$$=\frac{x^3-x+2ax^2-2a}{2(x^2-1)}+\frac{bx+c}{2(x^2-1)}$$

$$=\frac{x^3+2ax^2-x+bx-2a+c}{2(x^2-1)}$$

$$=\frac{x^3+2ax^2+(b-1)x-2a+c}{2\left(x^2-1\right)}$$

ويما أن: $f(x)=\frac{x^3-4x^2+3x-2}{2\left(x^2-1\right)}$

نجد: $\frac{x^3+2ax^2+(b-1)x-2a+c}{2\left(x^2-1\right)}=\frac{x^3-4x^2+3x-2}{2\left(x^2-1\right)}$

أي : $x^3+2ax^2+(b-1)x-2a+c=x^3-4x^2+3x-2$ ، فبالمطابقة نجد:

$$\begin{cases}1=1\\2a=-4\\b-1=3\\-2a+c=-2\end{cases}\text{ ومنه : }\begin{cases}1=1\\a=-2\\b=4\\-2(-2)+c=-2\end{cases}\text{ ومنه }\begin{cases}1=1\\a=-2\\b=4\\c=-6\end{cases}$$

3 . الجواب ج 3) :

لدينا $f(x)=\frac{1}{2}x-2+\frac{4x-6}{2\left(x^2-1\right)}=\frac{1}{2}x-2+\frac{2x-3}{x^2-1}$ من السؤال 2 .

ومنه : $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(\frac{1}{2}x-2\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-3}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$

تمرين 21

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2;3\}$ بجدول تغيراتها التالي:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f(x)$	2	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5

عين المستقيمات المقاربة لـ (C) منحنى الدالة f ثم استنتج الوضع النسبي لهذه المستقيمات مع (C).

الحل

• بما أن $\lim_{x\to-\infty}f(x)=2$ ،فإن المستقيم (D_1) ذا المعادلة $y=2$ مقارب أفقي لـ (C) عند $-\infty$

وبما أن من أجل كل x من المجال $]-\infty;2[$ لدينا: $f(x)>2$ ، فإن (C) يقع فوق (D_1) .

• بما أن $\lim_{x\to2}f(x)=+\infty$ ،فإن المستقيم (D_2) ذا المعادلة $x=2$ مقارب عمودي لـ (C)

بجوار $+\infty$. وإذا كان $x < 2$ ، فإن (C) يقع على يسار (D_2). وإذا كان $x > 2$ ، فإن (C) يقع على يمين (D_2).

• بما أن $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = +\infty$ ،فإن المستقيم (D_3) ذا المعادلة $x = 3$ مقارب عمودي لـ (C) بجوار $-\infty$ و $+\infty$. وإذا كان $x < 3$ ، فإن (C) يقع على يسار (D_3). وإذا كان $x > 3$ ، فإن (C) يقع على يمين (D_3).

• بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$ ،فإن المستقيم (D_4) ذا المعادلة $y = 5$ مقارب أفقي لـ (C) عند $+\infty$ وبما أن من أجل كل x من المجال $]3;+\infty[$ $f(x) > 5$ ،فإن (C) يقع فوق (D_4) .

تمرين 22

أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها D في كل حالة :

1) $f(x) = 3x^2 - x + 5$. 2) $f(x) = -2x^2 + x - 4$. 3) $f(x) = 2x^3 + x + 1$.

4) $f(x) = -3x^3 - 4x + 5$. 5) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-3}$. 6) $f(x) = \dfrac{3x+1}{-x+2}$.

7) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 1}{x-1}$. 8) $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{x^2+1}$. 9) $f(x) = 2x + 3 + \dfrac{1}{x}$.

10) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2 - x}$.

الحل

1) $D = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$. ومنه:

$$* \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(3x^2 - x + 5\right) = \lim_{x \to -\infty} (3x^2) = +\infty$$

$$* \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(3x^2 - x + 5\right) = \lim_{x \to +\infty} (3x^2) = +\infty$$

2) $D = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$. ومنه:

$$* \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(-2x^2 + x - 4\right) = \lim_{x \to -\infty} (-2x^2) = -\infty$$

$$* \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(-2x^2 + x - 4\right) = \lim_{x \to +\infty} (-2x^2) = -\infty$$

3) $D = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$. ومنه:

$$* \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(2x^3 + x + 1\right) = \lim_{x \to -\infty} (2x^3) = -\infty$$

$$* \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(2x^3 + x + 1\right) = \lim_{x \to +\infty} (2x^3) = +\infty$$

4) $D = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$. ومنه:

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-3x^3 - 4x + 5\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-3x^3) = +\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-3x^3 - 4x + 5\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^3) = -\infty$

5) $D = \mathbb{R} - \{3\} =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$. ومنه:

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x - 1}{x - 3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 1}{x - 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$

* $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 3}} \dfrac{2x - 1}{x - 3} = \dfrac{5}{0^-} = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 3}} \dfrac{2x - 1}{x - 3} = \dfrac{5}{0^+} = +\infty$

لأن إشارة المقام $x - 3$ هي كما في الجدول :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x - 3$		$-$	0	$+$	

6) $D = \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$. ومنه:

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x + 1}{-x + 2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x}{-x} = -3$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + 1}{-x + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{-x} = -3$

* $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 2}} \dfrac{3x + 1}{-x + 2} = \dfrac{7}{0^+} = +\infty$ و $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 2}} \dfrac{3x + 1}{-x + 2} = \dfrac{7}{0^-} = -\infty$

لأن إشارة المقام $-x + 2$ هي كما في الجدول :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-x + 2$		$+$	0	$-$	

7) $D = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$. ومنه:

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 3x + 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 3x + 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

* $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 1}} \dfrac{x^3 - 3x + 1}{x - 1} = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$

* $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} \dfrac{x^3 - 3x + 1}{x - 1} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$

لأن إشارة المقام $x - 1$ هي كما في الجدول :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

8) $D=\mathbb{R}$ لأن $x^2+1>0$ من أجل كل عدد حقيقي x ومنه:

$$* \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+1}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3$$

$$* \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3$$

9) $D=\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$. ومنه:

$* \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x+3+\frac{1}{x}\right)=-\infty$ ، لأن $\lim_{x\to-\infty}(2x+3)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$.

$* \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x+3+\frac{1}{x}\right)=+\infty$ ، لأن $\lim_{x\to+\infty}(2x+3)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

$* \lim_{\substack{<\\x\to0}} f(x)=\lim_{\substack{<\\x\to0}}\left(2x+3+\frac{1}{x}\right)=-\infty$ ، لأن $\lim_{\substack{<\\x\to0}}(2x+3)=3$ و $\lim_{\substack{<\\x\to0}}\frac{1}{x}=-\infty$.

$* \lim_{\substack{>\\x\to0}} f(x)=\lim_{\substack{>\\x\to0}}\left(2x+3+\frac{1}{x}\right)=+\infty$ ، لأن $\lim_{\substack{>\\x\to0}}(2x+3)=3$ و $\lim_{\substack{>\\x\to0}}\frac{1}{x}=+\infty$.

10) $D=\mathbb{R}-\{0;1\}=]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$.

لأن المقام $x^2-x=x(x-1)$ ينعدم عند 0 و 1 ومنه:

$$* \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{x^2-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$* \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

- لحساب النهايات $\lim_{\substack{<\\x\to0}} f(x)$ ، $\lim_{\substack{>\\x\to0}} f(x)$ ، $\lim_{\substack{>\\x\to1}} f(x)$ ، $\lim_{\substack{<\\x\to1}} f(x)$ نستعين بإشارة المقام x^2-x الموضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-x		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$* \lim_{\substack{<\\x\to0}} f(x)=\lim_{\substack{<\\x\to0}}\frac{x+3}{x^2-x}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

$$* \lim_{\substack{>\\x\to0}} f(x)=\lim_{\substack{>\\x\to0}}\frac{x+3}{x^2-x}=\frac{3}{0^-}=-\infty$$

$\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 1}} \frac{x+3}{x^2-x} = \frac{4}{0^-} = -\infty$ *

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} \frac{x+3}{x^2-x} = \frac{4}{0^+} = +\infty$ *

تمرين 23

أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها D (يطلب تعيينها) في كل حالة :

1) $f(x) = 2+\sqrt{x}$. 2) $f(x) = (1-x)(1+\sqrt{x})$. 3) $f(x) = \sqrt{x+1}+\sqrt{x}$.

4) $f(x) = \sqrt{2x^2-x+3}$. 5) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$. 6) $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x}-2}$.

الحل

1) $D = [0;+\infty[$. ومنه: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2+\sqrt{x}) = +\infty$. لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

2) $D = [0;+\infty[$. ومنه:

لدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} (1-x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} (1+\sqrt{x}) = +\infty$ ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

3) $D = [0;+\infty[$. لأن $x \geq 0$ و $x+1 \geq 0$ تعني $x \geq 0$ و $x \geq -1$ أي $x \geq 0$. ومنه:

لدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1}) = +\infty$ ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4) $D = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$. لأن $2x^2-x+3 > 0$ إذ أن مميز كثير الحدود $2x^2-x+3$ هو $\Delta = -5 < 0$ ومعامل x^2 هو $2 > 0$ ومنه:

لدينا: $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x^2-x+3) = +\infty$ و $\lim\limits_{X \to +\infty} (\sqrt{X}) = +\infty$ ومنه $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{2x^2-x+3} = +\infty$

إذن: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. ولدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x^2-x+3) = +\infty$ و $\lim\limits_{X \to +\infty} (\sqrt{X}) = +\infty$ ومنه

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x^2-x+3} = +\infty$ إذن: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

5) $D =]-\infty;-1] \cup]1;+\infty[$ لأن f معرفة معناه: $\frac{x+1}{x-1} \geq 0$ و $x-1 \neq 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

إذن سندرس النهايات $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{\substack{> \\ x\to1}} f(x)$. لدينا:

* $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x-1}=1$ و $\lim_{X\to1}\sqrt{X}=1$ ومنه: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$.

* $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=1$ و $\lim_{X\to1}\sqrt{X}=1$ ومنه: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$.

* $\lim_{\substack{> \\ x\to1}}\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{0^+}=+\infty$ و $\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ ومنه: $\lim_{\substack{> \\ x\to1}} f(x)=+\infty$.

6) . $D=[0;4[\cup]4;+\infty[$. لأن f معرفة معناه: $x\geq0$ و $\sqrt{x}-2\neq0$

أي: $x\geq0$ و $\sqrt{x}\neq2$ أي: $x\geq0$ و $x\neq4$ وعليه $D=[0;4[\cup]4;+\infty[$.

إذن سندرس النهايات: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{\substack{< \\ x\to4}} f(x)$ ، $\lim_{\substack{> \\ x\to4}} f(x)$. لدينا:

* $\lim_{\substack{< \\ x\to4}}(x-2)=2>0$ و $\lim_{\substack{< \\ x\to4}}(\sqrt{x}-2)=0$ و $\sqrt{x}<2$ من أجل $x<4$.

إذن: $\lim_{\substack{< \\ x\to4}} f(x)=\frac{2}{0^-}=-\infty$.

* $\lim_{\substack{> \\ x\to4}}(x-2)=2>0$ و $\lim_{\substack{> \\ x\to4}}(\sqrt{x}-2)=0$ و $\sqrt{x}>2$ من أجل $x>4$.

إذن: $\lim_{\substack{> \\ x\to4}} f(x)=\frac{2}{0^+}=+\infty$.

* $\lim_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-2)=+\infty$. ومنه: حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$

<u>إزالة حالة عدم التعيين</u> :

لدينا من أجل كل x من D :

$$\frac{x-2}{\sqrt{x}-2}=\frac{x-2}{\sqrt{x}-2}\times\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\frac{(x-2)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-2^2}=\frac{x\sqrt{x}+2x-2\sqrt{x}-4}{x-4}$$

$$=\frac{(x-2)\sqrt{x}+2x-4}{x-4}=\left(\frac{x-2}{x-4}\right)\sqrt{x}+\frac{2x-4}{x-4}$$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x-4}\right)=1$ و $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-4}{x-4}\right)=2$

ومنه: $\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{x-2}{x-4}\right)\sqrt{x}+\frac{2x-4}{x-4}\right)=+\infty$ ، إذن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

تمرين 24

باستعمال تعريف العدد المشتق احسب النهايتين :

1) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$. 2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

الحل

1) لدينا: $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4} = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ ، إذن نستعمل الدالة "الجذر التربيعي" $f : x \mapsto \sqrt{x}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و لدينا: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

ومنه: $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x)-f(4)}{x-4} = f'(4) = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$ ،

إذن: $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \dfrac{1}{4}$

2) لدينا: $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{0+1}}{x-0} = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ ، إذن نستعمل الدالة $g : x \mapsto \sqrt{x+1}$

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و لدينا: $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

***تذكير:**

مشتقة الدالة: $x \mapsto \sqrt{ax+b}$ على المجال $\left]-\dfrac{b}{a};+\infty\right[$ هي الدالة:

$x \mapsto \dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$ حيث $a \neq 0$ ومنه:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{0+1}}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0) = \frac{1}{2\sqrt{0+1}} = \frac{1}{2}$$

إذن: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \dfrac{1}{2}$

تمرين 25

نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x+1}}$

1) بين أنه إذا كان $x > 1$ فإن: $\dfrac{1}{\sqrt{2x}} > \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

2) استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

الحل

1) لدينا: $x > 1$ ومن أجل كل x فإن: $x \geq x$، بجمع المتباينتين طرفا بطرف نجد:

$x + x > x + 1$ أي $2x > x + 1$، ولكون العددان $2x$ و $x + 1$ موجبان فبالمرور إلى الجذر التربيعي نجد $\sqrt{2x} > \sqrt{x+1}$ ثم إلى المقلوب نجد: $\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$.

2) لدينا: $\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$ وبضرب طرفي هذه المتباينة في العدد الموجب $2x$ نجد:

$\frac{2x}{\sqrt{x+1}} > \frac{2x}{\sqrt{2x}}$، أي $f(x) > \frac{2x}{\sqrt{2x}}$، لكن:

$$\frac{2x}{\sqrt{2x}} = \frac{2x}{\sqrt{2x}} \times \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}} = \frac{2x\sqrt{2x}}{2x} = \sqrt{2x}$$

إذن $f(x) > \sqrt{2x}$، وبما أن $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{2x} = +\infty$ فحسب مبرهنة النهايات بالمقارنة نستنتج أن:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

تمرين 26

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$ فإن: $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1$.

2) استنتج النهايتين التاليتين: أ) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$ ، ب) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$

الحل

1) نقارن بين $\frac{x}{x+1}$ و 1 ثم بين $\frac{x}{x+1}$ و $\frac{1}{2}$ من أجل $x \geq 1$.

لدينا: $\frac{x}{x+1} - 1 = \frac{x - (x+1)}{x+1} = \frac{-1}{x+1}$، وبما أن $x + 1 > 0$ نستنتج أن: $\frac{x}{x+1} - 1 \leq 0$

أي: $\frac{x}{x+1} \leq 1$.

ولدينا من جهة: $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} = \frac{2x - (x+1)}{2(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}$، وبما أن $x + 1 > 0$ و $x - 1 \geq 0$

نستنتج أن: $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} \geq 0$ ، أي: $\frac{x}{x+1} \geq \frac{1}{2}$.

خلاصة ما سبق: من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$ لدينا: $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1$.

2) استنتاج النهايتين : أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{x+1}$ ، ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x}\,(x+1)}$

أ) من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 1$ لدينا: $\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{x}{x+1}\leq 1$ ، بضرب طرفي المتباينة المضاعفة الأخيرة في العدد الموجب تماما $\sqrt{x}$ نجد: $\dfrac{1}{2}\sqrt{x}\leq\dfrac{x\sqrt{x}}{x+1}\leq\sqrt{x}$ ، وبما أن:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}\sqrt{x}=+\infty$ نستنتج حسب مبرهنة النهايات بالمقارنة أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{x+1}=+\infty$.

ب) لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 1$: $\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{x}{x+1}\leq 1$ ،بضرب طرفي المتباينة المضاعفة الأخيرة في العدد الموجب تماما $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ نجد: $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\leq\dfrac{x}{\sqrt{x}\,(x+1)}\leq\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ، وبما أن:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=0$ ، نستنتج حسب مبرهنة الحصر أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x}\,(x+1)}=0$.

تمرين 27

أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها D في كل حالة.

1) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x^2-1}$. 2) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{|x-1|}$. 3) $f(x)=\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$.

الحل

1) $D=\mathbb{R}-\{-1;1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ ،

لأن $x^2-1\neq 0$ تعني $x\neq 1$ و $x\neq -1$. سنكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة على D.

لدينا: $|x-1|=\begin{cases}x-1 & ;x-1>0\\ -(x-1) & ;x-1<0\end{cases}$ ، أي: $|x-1|=\begin{cases}x-1 & ;x>1\\ -x+1 & ;x<1\end{cases}$ ، ومنه:

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x^2-1} & ;x\in]1;+\infty[\\[2mm] \dfrac{-x+1}{x^2-1} & ;x\in]-\infty;-1[\cup]-1;1[\end{cases}$. إذن:

• $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{x}=0$ ، إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ ، إذن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

لحساب النهايات: $\lim_{\substack{<\\ x\to-1}} f(x)$ ، $\lim_{\substack{>\\ x\to-1}} f(x)$ ، $\lim_{\substack{<\\ x\to1}} f(x)$ ، $\lim_{\substack{>\\ x\to1}} f(x)$ نستعمل عبارة f المناسبة كما عمدنا في حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ وإشارة المقام x^2-1 الموضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

لدينا:

* $\lim_{\substack{<\\ x\to-1}} f(x)=\lim_{\substack{<\\ x\to-1}}\frac{|x-1|}{x^2-1}=\frac{2}{0^+}=+\infty$ و $\lim_{\substack{>\\ x\to-1}} f(x)=\lim_{\substack{>\\ x\to-1}}\frac{|x-1|}{x^2-1}=\frac{2}{0^-}=-\infty$.

* $\lim_{\substack{<\\ x\to1}} f(x)=\lim_{\substack{<\\ x\to1}}\frac{-x+1}{x^2-1}=\lim_{\substack{<\\ x\to1}}\frac{-\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\lim_{\substack{<\\ x\to1}}\frac{-1}{(x+1)}=-\frac{1}{2}$.

* $\lim_{\substack{>\\ x\to1}} f(x)=\lim_{\substack{>\\ x\to1}}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{\substack{>\\ x\to1}}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\lim_{\substack{>\\ x\to1}}\frac{1}{(x+1)}=\frac{1}{2}$.

2) $D=\mathbb{R}-\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

لأن f معرفة تعني $|x-1|\neq 0$ أي $x-1\neq 0$ أي $x\neq 1$.

لدينا: $|x-1|=\begin{cases}x-1 & ;x-1>0\\ -(x-1) & ;x-1<0\end{cases}$ ، أي: $|x-1|=\begin{cases}x-1 & ;x>1\\ -x+1 & ;x<1\end{cases}$ ، ومنه:

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3}{x-1} & ;x>1\\[2mm] \dfrac{x^2+3}{-x+1} & ;x<1\end{cases}$. إذن:

* $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3}{-x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}^2}{-\cancel{x}}=\lim_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ ، إذن: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}^2}{\cancel{x}}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ ، إذن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

* $\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2+3}{|x-1|}=\frac{4}{0^+}=+\infty$. لأن $|x-1|>0$ من أجل كل $x\neq1$.

إذن: $\lim_{x\to1} f(x)=+\infty$

3) $D=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ لأن f معرفة تعني $x+1\neq0$ أي $x\neq-1$.

إذن سندرس النهايات $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)$ ، $\lim_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)$.

لدينا باستعمال نهاية دالة مركبة ، وباستعمال إشارة $x+1$ الموضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$ -1 $+\infty$
$x+1$	$-$ 0 $+$

* $\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x+1}=1$ و $\lim_{X\to1}|X|=1$ ، ومنه: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$.

* $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=1$ و $\lim_{X\to1}|X|=1$ ، ومنه: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$.

* $\lim_{\substack{x\to-1\\<}}\frac{x-1}{x+1}=\frac{-2}{0^-}=+\infty$ و $\lim_{X\to+\infty}|X|=+\infty$ ، ومنه: $\lim_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)=+\infty$.

* $\lim_{\substack{x\to-1\\>}}\frac{x-1}{x+1}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$ و $\lim_{X\to-\infty}|X|=+\infty$ ، ومنه: $\lim_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=+\infty$.

تمرين 28

لتكن الدالة f حيث: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+d}$ و (C) تمثيلها البياني في معلم.

عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c و d بحيث : (C) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=1$ و مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=2x+3$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$ ويشمل النقطة $A(0;4)$.

الحل

f معرفة معناه $x+d\neq0$ أي $x\neq-d$ و المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب لـ (C)،

إذن: $-d=1$ ، أي $d=-1$.

لدينا: $\lim_{|x|\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{c}{x+d}=0$ ، أي المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$ وعند $+\infty$. وبما أن المستقيم ذو المعادلة $y=2x+3$ مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$ وعند $+\infty$. نستنتج أن: $ax+b=2x+3$ ،

بالمطابقة نجد: $a=2$ ، $b=3$.

لدينا إذن: $f(x)=2x+3+\frac{c}{x-1}$ ، وبما أن (C) يشمل النقطة $A(0;4)$ ،

فإن: $f(0)=4$ ومنه : $4=2\times0+3+\frac{c}{0-1}$ ، أي $-c=1$ ، إذن: $c=-1$.

إذن: $a=2$ ، $b=3$ ، $c=-1$ و $d=-1$.

تمرين 29

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$.

1) عين العددين الحقيقيين a و b، بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x \neq -2$ يكون $f(x)=a+\dfrac{b}{x+2}$.

2) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها D.

3) استنتج المستقيمات المقاربة لـ (C) المنحني الممثل للدالة f.

4) عين مركز تناظر المنحني (C).

الحل

1) لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x \neq -2$:

$$a+\frac{b}{x+2}=\frac{a(x+2)}{x+2}+\frac{b}{x+2}=\frac{ax+2a+b}{x+2}=f(x)=\frac{2x+3}{x+2}$$

إذن: $\dfrac{ax+2a+b}{x+2}=\dfrac{2x+3}{x+2}$، ومنه: $ax+2a+b=2x+3$، بالمطابقة نجد:

$a=2$ و $2a+b=3$ أي $2\times 2+b=3$ أي $b=-1$، إذن: $f(x)=2-\dfrac{1}{x+2}$.

2) لدينا: $D=\mathbb{R}-\{-2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$. ومنه:

* $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{2x+3}{x+2}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$.

* $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}}\dfrac{2x+3}{x+2}=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}}\dfrac{2x+3}{x+2}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$

لأن إشارة المقام $x+2$ هي كما في الجدول التالي:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	

ملاحظة: يمكن استعمال العبارة $f(x)=2-\dfrac{1}{x+2}$ لحساب النهايات السابقة.

3) المستقيمات المقاربة لـ (C):

* لدينا: $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=2$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=2$ مقارب لـ (C)

- موازي لمحور الفواصل- عند $+\infty$ و $-\infty$.

* لدينا $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to -2}} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to -2}} f(x) = -\infty$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $x = -2$ مقارب لـ (C) ـ موازي لمحور التراتيب ـ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

4) مركز تناظر المنحني (C) هو النقطة $A(-2;3)$ ، نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين .

تمرين 30

لتكن f الدالة المعرفة من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 4$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 10}{x - 4}$.

1) بين أنه توجد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 4$:

$f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 4}$.

2) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = ax + b$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C) المنحني الممثل للدالة f في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ للمستوي عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

3) أدرس الوضع النسبي لـ (C) بالنسبة إلى (D) .

الحل

1) لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 4$:

$$ax + b + \frac{c}{x-4} = \frac{ax^2 - 4ax + bx - 4b + c}{x-4} = \frac{ax^2 + (b-4a)x - 4b + c}{x-4} = \frac{x^2 - x - 10}{x-4}$$

ومنه: $ax^2 + (-4a+b)x - 4b + c = x^2 - x - 10$ وحسب تساوي كثيري حدود،

نجد هكذا: $\begin{cases} a = 1 \\ -4a + b = -1 \\ -4b + c = -10 \end{cases}$ وهذا يعني أن: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 4a - 1 = 3 \\ c = 4b - 10 = 2 \end{cases}$ ، إذن: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{cases}$

نستخلص أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 4$: $f(x) = x + 3 + \dfrac{2}{x-4}$.

2) لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-4) = +\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x-4} = 0$

وهذا يعني أنه لدينا : $f(x) = x + 3 + h(x)$ حيث $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$) مع $h(x) = \dfrac{2}{x-4}$ (

إذن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x + 3$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C) عند $+\infty$.

و بالمثل، ولكون $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x-4} = 0$ نستنتج أن المستقيم (D) هو مستقيم مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$.

3) لدراسة الوضع النسبي لـ (C) بالنسبة إلى (D) ،ندرس إشارة الفرق $f(x) - (x+3)$ ، أي

إشارة $h(x)=\dfrac{2}{x-4}$ ، لدينا:

- على المجال $]-\infty;4[$ أي $x<4$ ، لدينا $x-4<0$ ومنه $h(x)<0$ ، وبالتالي (C) يقع تحت (D).
- على المجال $]4;+\infty[$ أي $x>4$ ، لدينا $x-4>0$ ومنه $h(x)>0$ ، وبالتالي (C) يقع فوق (D).

تمرين 31

نعتبر الدالة f المعرفة على $D=\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$.

ليكن (C) المنحني الممثل للدالة f في معلم:

1) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها مبينا المستقيم المقارب لـ (C).

2) أ • عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c و d بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x\neq-1$ يكون $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{(x+1)^2}$.

ب • استنتج أن المنحني (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $-\infty$ وعند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

جـ • أدرس الوضع النسبي لـ (C) و (Δ).

الحل

1) $D=\mathbb{R}-\{-1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$. ولدينا:

$f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}=\dfrac{x^3+3x^2+6x+3}{x^2+2x+1}$. ومنه:

* $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+3x^2+6x+3}{x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$.

* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+3x^2+6x+3}{x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

* $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$. ومنه المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مقارب لـ (C) بجوار $-\infty$.

2) أ • لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x\neq-1$:

$$ax+b+\frac{cx+d}{(x+1)^2}=\frac{(ax+b)(x+1)^2}{(x+1)^2}+\frac{cx+d}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(ax+b)(x^2+2x+1)}{(x+1)^2}+\frac{cx+d}{(x+1)^2}=\frac{(ax^3+2ax^2+ax+bx^2+2bx+b)+cx+d}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{ax^3+(2a+b)x^2+(a+2b+c)x+b+d}{(x+1)^2}=f(x)=\frac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$$

ومنه: $\frac{ax^3+(2a+b)x^2+(a+2b+c)x+b+d}{(x+1)^2}=\frac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$

ومنه: $ax^3+(2a+b)x^2+(a+2b+c)x+b+d=x^3+3x^2+6x+3$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a=1\\2a+b=3\\a+2b+c=6\\b+d=3\end{cases}$ وهذا يعني أن: $\begin{cases}a=1\\b=3-2a=1\\c=6-a-2b=3\\d=3-b=2\end{cases}$ ، ومنه: $\begin{cases}a=1\\b=1\\c=3\\d=2\end{cases}$

إذن من أجل كل عدد حقيقي $x\neq -1$ لدينا: $f(x)=x+1+\frac{3x+2}{(x+1)^2}$.

ب• لدينا: $f(x)-(x+1)=\frac{3x+2}{(x+1)^2}$ ومنه:

* $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{(x+1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=0$

* $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{(x+1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$

إذن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا $y=x+1$: (Δ) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

جـ• ندرس إشارة الفرق $f(x)-(x+1)$ أي إشارة $\frac{3x+2}{(x+1)^2}$.

إن إشارة $\frac{3x+2}{(x+1)^2}$ هي من إشارة البسط $3x+2$ لأن المقام $(x+1)^2>0$ من أجل $x\neq -1$.

إشارة البسط $3x+2$ هي كما في الجدول التالي:

x	$-\infty$ $\qquad -1 \qquad -\frac{2}{3} \qquad +\infty$
$3x+2$	$-$ ‖ $-$ $\quad 0 \quad$ $+$

ومنه: * (C) يقع تحت (Δ) على كل من المجالين $]-\infty;-1[$ و $\left]-1;-\frac{2}{3}\right[$.

* (C) يقع فوق (Δ) على المجال $\left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$.

* (Δ) يقطع (C) في النقطة ذات الفاصلة $-\frac{2}{3}$، للحصول على ترتيبها نعوض في معادلة (Δ) نجد: $\frac{1}{3}=\left(-\frac{2}{3}\right)+1$. (كذلك يكون ترتيبها $f\left(-\frac{2}{3}\right)$)

إذن: (Δ) يقطع (C) في النقطة ذات الاحداثيين: $\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

تمرين 32

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$، وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم للمستوي.

1) أدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2) حدد النهايتين: $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)+x$.

3) استنتج أن المنحني (C) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') يطلب تعيين معادلتيهما.

4) أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ').

الحل

1) باستعمال قاعدة حساب نهاية دالة مركبة نجد:

$\lim_{x\to+\infty} x^2+x+1=\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} x^2+x+1=\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$،

وبما أن $\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ فإن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

2) • لدينا في حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x$ حالة عدم تعيين، نستعمل عبارة مختصرة للعبارة $\sqrt{x^2+x+1}-x$.

لدينا من أجل كل $x>0$:

$$\sqrt{x^2+x+1}-x=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

$$= \frac{(x^2+x+1)-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

ولدينا من جهة: $$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x} = 1$ وبما أن $\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} = 1$ فإن $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1 = 2$

ومنه: $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}$ أي $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = \frac{1}{2}$.

• وبالمثل لدينا: $$f(x)+x = \frac{(x^2+x+1)-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$$

من أجل $x<0$: $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ ومنه:

$$f(x)+x = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x} = \frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}$$

وبالتالي حسب مبرهنة نهاية دالة مركبة و مبرهنات العمليات نجد $\lim_{x\to-\infty} f(x)+x = -\frac{1}{2}$

3) نستنتج من السؤال 2 و حسب مبرهنات العمليات أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x-\frac{1}{2} = 0$

وأن $\lim_{x\to-\infty} f(x)+x+\frac{1}{2} = 0$. وهذا يعني أن المستقيم (Δ) الذي معادلة له: $y = x+\frac{1}{2}$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C) عند $+\infty$.

وأن المستقيم (Δ') الذي معادلة له: $y \doteq -x-\frac{1}{2}$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$.

4) *وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ):

لدينا من أجل $x>0$: $$f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{x^2+x+1}-\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}} = \frac{x^2+x+1-\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}$$

بما أن $x>0$ فإن $\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}>0$ ، أي $f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)>0$.

وبالتالي (C) يقع فوق (Δ) من أجل $x>0$.

*وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ'):

لدينا ،من أجل $x<0$: $f(x)-\left(-x-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)$

بإمكاننا تحديد إشارة العبارة: $\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)$ دون اللجوء إلى مرافقها.

لدينا: من أجل $x<0$: $x^2+x+1>x^2+x+\frac{1}{4}$ ، أي $x^2+x+1>\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ ،

ومنه: $\sqrt{x^2+x+1}>\left|x+\frac{1}{2}\right|$ ، أي $\sqrt{x^2+x+1}>-\left(x+\frac{1}{2}\right)$ ، لأن:

$$\left|x+\frac{1}{2}\right|=\begin{cases} x+\frac{1}{2} & ;x\geq-\frac{1}{2} \\ -\left(x+\frac{1}{2}\right) & ;x\leq-\frac{1}{2}\end{cases}$$

، ومنه: $\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)>0$.

ومنه: $f(x)+\left(x+\frac{1}{2}\right)>0$. وبالتالي (C) يقع فوق (Δ') من أجل $x<0$.